РОЗДІЛ 9
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 330.45:519.83:519.85

DOI: https://doi.org/10.32782/2304-0920/1-86-23

Приймак В. І.
Голубник О. Р.
Львівський національний університет імені Івана Франка

НЕЧІТКІ МОДЕЛІ АНТАГОНІСТИЧНИХ ІГОР

У роботі запропоновано спосіб розв'язування певного класу теоретико-ігрових моделей за умов невизначеності. Обґрунтовано, що значну частину задач економічної конкуренції можна звести до скінченної матричної гри двох гравців із нульовою сумою, матриця виграшів першого гравця якої має специфічний вигляд. Ураховуючи високий ступінь невизначеності сучасних вітчизняних ринків і необхідність спрощення наявної ситуації під час її моделювання через неможливість включення в розроблювану модель всіх реальних багатоманітних зв'язків, у статті розглядаються антагоністичні ігри з нечіткими параметрами. Запропоновано шукати розв'язок розглянутого класу скінченних матричних ігор зведенням їх до двох двоїстих оптимізаційних задач лінійного програмування з гнучкими граничними обмеженнями. Знайшовши розв'язок цих двоїстих задач і розрахувавши змішані стратегії двох гравців, особа, яка приймає управлінські рішення, зможе зробити правильний вибір серед сукупності альтернативних рішень.
Ключові слова: теорія матричних ігор, оптимальна стратегія, модель лінійного програмування, нечітка модель, функція належності, кусково-лінійна функція належності.

Постановка проблеми. Рушієм ринкових відносин є конкуренція. Без здорової економічної конкуренції нормальне функціонування ринкового механізму неможливе. Для становлення й утвердження в Україні нормальних ринкових відносин необхідні наукові дослідження цих процесів, зокрема потрібне вивчення можливих конфліктних ситуацій в економіці країни та методів їх вирішення.

Суттєву допомогу в ефективному вирішенні цих проблем на сучасному рівні розвитку науки надає математика, особливо її найновіші теорії та підходи. Моделюванням конфліктних ситуацій та виробленням оптимальної поведінки їх учасників займається теорія ігор. Сьогодні науковцями розроблено цілу низку видів ігрових моделей і методів їх розв'язування. Звести до ігрової схеми можна багато реальних ситуацій. Цю теорію доцільно використовувати для прийняття ефективних управлінських рішень як на мікро-, так і на макрорівні.

У разі моделювання будь-яких ситуацій чи процесів, щоб складена модель не була надто громіздкою, процедуру її побудови спрощують і деякі другорядні чинники не враховують. Аналогічно отримують ігрові моделі. У результаті отримана «точна» модель не враховує всіх необхідних моментів. Урахування впливу цих чинників призводить до нечітких моделей, які хоча й наближені, але їхні розв'язки ближчі до реальних величин порівняно з розв'язками «точних» моделей. Тому актуальними є наукові дослідження, які зводять вирішення потрібної проблеми до знаходження розв'язку нечітких моделей і використання для цього теорії нечіткої логіки і нечітких множин.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розробленню основних положень теорії ігор та використанню цієї теорії для вирішення цілої низки економічних проблем присвячено наукові публікації багатьох учених – від першої ґрунтовної монографії Дж. Фон Неймана і О. Моргенштерна [1] із цієї проблематики до найновіших наукових статей, монографій та інших публікацій науковців з усього світу. Українські вчені також активно використовують цю теорію у своїх дослідженнях. Наприклад, автори монографії [2] використали апарат теорії ігор для аналізу і прогнозування політичних процесів. Узагальнення наукових досліджень, які оперують ігровими моделями для аналізу, оцінювання та прийняття рішень в умовах ризику, подано в книзі [3]. Дослідженнями теоретико-ігрових моделей та їх застосуванням до вирішення різних економічних задач займалися Ф. Рогальський, Я. Курилович, А. Цукоренко [4], В. Юринець [5], С. Лондар [6] та ін.

Указані дослідження виконані в припущенні, що параметри моделей чітко визначено. Хоча в дійсності під час моделювання значної кількості економічних задач ситуацію спрощують, а в реальності ми не можемо точно вказати величини цих параметрів. Можна вказати тільки, що значення даного параметра приблизно дорівнює певному числу чи належить певному інтервалу. У результаті отримуємо нечіткі моделі, або інакше моделі за умов невизначеності, дослідженню яких присвятили свої роботи, крім зарубіжних, такі українські науковці, як В. Вітлінський, А. Матвійчук [7], М. Сявавко, О. Рибицька [8], Ю. Зайченко [9], А. Ротштейн [10], Н. Купрій [11] та багато інших. У науковій статті [12] запропоновано підхід до знаходження розв'язку специфічної антагоністичної гри, модель якої відображає значну кількість економічних задач. Розв'язування вказаної гри у цій статті зводиться до оптимізаційної задачі лінійного програмування із гнучкими граничними обмеженнями, для моделювання яких використовується лінійна функція належності. У пропонованій до огляду роботі зроблено спробу вирішення розглянутого завдання, моделюючи ці граничні обмеження кусково-лінійними функціями належності.

Мета статті. Головною метою цієї роботи є розроблення методу зведення певного класу теоретико-ігрових моделей за умов невизначеності до задачі лінійного програмування з граничними обмеженнями, коефіцієнти яких зображено кусково-лінійними функціями належності і знаходження оптимального розв'язку цих задач.

Виклад основного матеріалу. У процесі економічних досліджень значна частина науковців для моделювання конфліктних ситуацій застосовує теорію ігор, зокрема теорію скінченних антагоністичних ігор двох гравців із нульовою сумою. Деяким із таких ситуацій відповідає антагоністична гра $\Gamma = X, Y, H$ у змішаних стратегіях із матрицею виграшів першого гравця, яка має вид:

$$H_1 = \begin{pmatrix} p_1 & -t_1 & \cdots & -t_1 \\ -t_2 & p_2 & \cdots & -t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -t_n & -t_n & \cdots & p_n \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Причому в квадратній матриці (1) величини p_i $(i = \overline{1,n})$ і t_i $(i = \overline{1,n})$ додатні. Вектори $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – змішані стратегії відповідно першого і другого гравців. До такої моделі антагоністичної гри зводяться, наприклад, задача збуту сільськогосподарської продукції [13], задача конкурентної боротьби продавців на роздрібному ринку товарів [14], а також низка інших подібних задач.

Припустимо, що всі $p_i = p$ $(i = \overline{1,n})$ і віднімемо *p* від кожного елемента матриці (1). Унаслідок цієї операції ціна гри також зменшиться на величину *p*, а оптимальні стратегії обох гравців не зміняться. У результаті отримаємо матрицю:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & -h_1 & \cdots & -h_1 \\ -h_2 & 0 & \cdots & -h_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -h_n & -h_n & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

де $h_i = p + t_i$, $(i = \overline{1,n})$.

Причому величин $h_i > 0$, $(i = \overline{1,n})$.

Для того щоб розв'язати антагоністичну гру з матрицею виграшів першого гравця (2), можна звести її до оптимізаційної задачі лінійного програмування. Для цього можна використати кілька методів [15, с. 55–57], простіший з яких передбачає, що ціна гри є додатною. Ураховуючи те, що в розглянутій моделі вона від'ємна, у роботі [14] доведено, що у цьому разі наша матрична гра еквівалентна такій парі двоїстих задач лінійного програмування (зроблено припущення, що кількість чистих стратегій у обох гравців однакова і дорівнює *n*):

$$\begin{cases} z_1 = s_1 + s_2 + \ldots + s_n \to max \\ 0 + h_2 s_2 \ldots + h_{n-1} s_{n-1} + h_n s_n \le 1 \\ h_1 s_1 + 0 + \ldots + h_{n-1} s_{n-1} + h_n s_n \le 1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ h_1 s_1 + h_2 s_2 + \ldots + h_{n-1} s_{n-1} + 0 \le 1 \\ s_j \ge 0, \left(j = \overline{1,n}\right) \end{cases}. \qquad (3)$$

і

$$\begin{cases} z_2 = q_1 + q_2 + \ldots + q_n \to min \\ 0 + h_1 q_2 \ldots + h_1 q_{n-1} + h_1 q_n \ge 1 \\ h_2 q_1 + 0 + \ldots + h_2 q_{n-1} + h_2 q_n \ge 1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ h_n q_1 + h_n q_2 + \ldots + h_n q_{n-1} + 0 \ge 1 \\ q_j \ge 0, \left(j = \overline{1,n}\right) \end{cases}. \qquad (4)$$

де $s_i = \dfrac{x_i}{-\nu}$, $(i = \overline{1,n})$, $q_j = \dfrac{y_j}{-\nu}$, $(j = \overline{1,n})$;

$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = \dfrac{1}{-\nu}$, ν – ціна гри, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – оптимальні змішані стратегії (щоб не ускладнювати позначення, ми позначили оптимальні змішані стратегії такими ж літерами, як і звичайні змішані стратегії)) відповідно першого і другого гравців антагоністичної гри з матрицею виграшів першого гравця (2).

Розв'язавши двоїсті задачі (3), (4), знайдемо ці оптимальні стратегії двох гравців заданої гри за формулами

$$x_i = -s_i \cdot \nu, \ (i = \overline{1,n}), \quad y_j = -q_j \cdot \nu, \ (j = \overline{1,n}). \qquad (5)$$

У разі коли всі коефіцієнти в задачах (3), (4) детерміновані, знайти їх розв'язок не становить особливих труднощів. Наприклад, можна скористатися програмними продуктами, які реалізують алгоритм симплекс-методу. Однак у багатьох практичних задачах усі ці коефіцієнти чи частина з них можуть бути «нечіткими» (ще кажуть «розмитими» чи «гнучкими»). Тоді виникає необхідність у застосуванні теорії нечіткої логіки і нечітких множин.

Використання положень цієї теорії залежить від того, який вид нечіткості мають первинні дані. Для визначеності припустимо, що коефіцієнти t_i $(i = \overline{1,n})$ можуть змінюватися від a_i до $a_i + c_i$ $(i = \overline{1,n})$, а p – від a до $a + c$. Причому різним відхиленням від значення a_i приписуються свої межі допустимості. Для лівих меж указаних проміжків міра допустимості дорівнює одиниці, а далі чим більше відхилення вправо від цієї межі, тим менша міра його допустимості, і дорівнює нулю для правих меж цих проміжків. Для спрощення використовуваних формул позначимо $t_0 = p$, $a_0 = a$, $c_0 = c$, $a_i^0 = a_i$ і $a_i^{K_i} = a_i + c_i$. У разі використання кусково-лінійної функції належності для t_i $(i = \overline{0,n})$ з урахуванням формули рівняння прямої, що проходить через дві точки, цю функцію можна записати так:

$$\mu_i(t_i) = \begin{cases} 1, t_i \in [0, a_i] \\ \mu_i^t\left(a_i^{k-1}\right) + \dfrac{\mu_i^t\left(a_i^k\right) - \mu_i^t\left(a_i^{k-1}\right)}{a_i^k - a_i^{k-1}}\left(t_i - a_i^{k-1}\right), \\ 0, t_i \in (a_i + c_i, +\infty) \end{cases} \qquad (6)$$

$$t_i \in \left(a_i^{k-1}, a_i^k\right], \left(k = \overline{1, K_i}\right).$$

Причому у формулі (6) величини $\mu_i^t\left(a_i^k\right)$ $(i = \overline{0,n}, k = \overline{1, K_i - 1})$ вибираються так, щоб функції $\mu(t_i)$ були увігнутими в інтервалах $(a_i, a_i + c_i)$ $(i = \overline{0,n})$.

Однак у моделі (4) коефіцієнтами є суми $h_i = p + t_i$, $(i = \overline{1,n})$. Формула функції належності для коефіцієнта h_i $(i = \overline{1,n})$ матиме вигляд:

$$\mu_i(h_i) = \begin{cases} 1, h_i \in \left[0, \hat{a}_i^{0}\right] \\ \mu_i^h\left(\hat{a}_i^{k-1}\right) + \dfrac{\mu_i^h\left(\hat{a}_i^{k}\right) - \mu_i^h\left(\hat{a}_i^{k-1}\right)}{\hat{a}_i^{k} - \hat{a}_i^{k-1}}\left(h_i - \hat{a}_i^{k-1}\right), h_i \in \left(\hat{a}_i^{k-1}, \hat{a}_i^{k}\right] \\ 0, h_i \in \left(\hat{a}_i^{K_i K_o}, +\infty\right) \end{cases}, \qquad (7)$$

де $\hat{a}_i^0 = a_i^0 + a_0^0$, $\hat{a}_i^k = \hat{a}_i^0 + \hat{a}_i^k$, ($k = \overline{1, K_i K_o}$),

$\hat{a}_i^{K_i K_o} = \hat{a}_i^0 + \hat{a}_i^{K_i K_o}$, ($i = \overline{1,n}$). Очевидно, що функції належності $\mu_i(h_i)$ будуть увігнутими в інтервалах $\left(\hat{a}_i^0, \hat{a}_i^{K_i K_o}\right)$ ($i = \overline{0,n}$).

Заміна в обмеженнях задачі (4) «твердих» параметрів на «м'які» з функціями належності (7) не порушує умову лінійності цієї задачі.

Розв'язування задачі (4) з нечіткими коефіцієнтами, функції належності яких задані формулами (7), є проблематичним. Тому для можливості використання описаного в літературі підходу до розв'язування задач лінійного програмування з нечіткими параметрами зведемо її до іншого вигляду. По-перше, цільову функцію помножимо на мінус одиницю і зведемо її до задачі на максимум. По-друге, кожну нерівність поділимо на коефіцієнти за невідомих із протилежним знаком (у кожній нерівності вони рівні між собою), тобто на ($-h_i$), ($i = \overline{1,n}$). Тепер задача (4) матиме вигляд:

$$\begin{cases} z = -z_2 = -q_1 - q_2 - \ldots - q_n \to max \\ 0 - q_2 - \ldots - q_{n-1} - q_n \le -\dfrac{1}{h_1} \\ -q_1 - 0 - \ldots - q_{n-1} - q_n \le -\dfrac{1}{h_2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ -q_1 - q_2 - \ldots - q_{n-1} - 0 \le -\dfrac{1}{h_n} \\ q_j \ge 0, \left(j = \overline{1,n}\right) \end{cases}. \qquad (8)$$

Отримана задача має параметри тільки в правих частинах нерівностей-обмежень. Ці параметри є нечіткими. Щоб отримати формули їхніх функцій належності, спочатку напишемо формули таких функцій для параметрів $h_i^* = -h_i < 0$, ($i = \overline{1,n}$). Вони матимуть вигляд:

$$\mu_i\left(h_i^*\right) = \begin{cases} 0, h_i^* \in \left(-\infty, -\hat{a}_i^{K_i K_o}\right] \\ \mu_i^h\left(\hat{a}_i^{l-1}\right) - \dfrac{\mu_i^h\left(\hat{a}_i^{l}\right) - \mu_i^h\left(\hat{a}_i^{l-1}\right)}{\hat{a}_i^{l} - \hat{a}_i^{l-1}}\left(h_i^* + \hat{a}_i^{l-1}\right), h_i^* \in \left(-\hat{a}_i^{l}, -\hat{a}_i^{l-1}\right] \\ 1, h_i^* \in \left(-\hat{a}_i^0, 0\right) \end{cases}, \qquad (9)$$

де $l = K_i K_o - k + 1, k = \overline{1, K_i K_o}$, ($i = \overline{1,n}$).

Для параметрів $\hat{h}_i = -\dfrac{1}{h_i}$ ($i = \overline{1,n}$) функції належності матимуть такий вигляд:

$$\mu_i\left(\hat{h}_i\right) = \begin{cases} 1, \hat{h}_i \in \left(-\infty, -b_i^0\right] \\ \mu_i^h\left(\hat{a}_i^{k-1}\right) - \dfrac{\mu_i^h\left(\hat{a}_i^{k}\right) - \mu_i^h\left(\hat{a}_i^{k-1}\right)}{b_i^k - b_i^{k-1}}\left(\hat{h}_i + b_i^{k-1}\right), \hat{h}_i \in \left(-b_i^{k-1}, -b_i^k\right] \\ 0, \hat{h}_i \in \left(-b_i^{K_i K_o}, 0\right) \end{cases}, \qquad (10)$$

де $b_i^k = \dfrac{1}{\hat{a}_i^k} = b_i^0 - d_i^k$, ($k = \overline{0, K_i K_o}$), ($i = \overline{1,n}$).

Розглянуті формули записані нами в припущенні, що всі обмеження задачі (8) є нечіткими. Однак на практиці можливі випадки, коли не всі ці обмеження можуть бути «гнучкими». Припустимо, що нечіткими є тільки m обмежень. Переставимо їх на початок системи обмежень. Множина допустимих розв'язків початкової задачі від цього не зміниться. Для спрощення запису моделі задачі і кращого розуміння її нечітких обмежень представимо її у формі, аналогічній до цієї, якою представлено подібні моделі в роботі [8, с. 140]:

$$\begin{cases} z = -q_1 - q_2 - \ldots - q_n \to max \\ g_i \sim\le -b_i^0, -b_i^0 + d_i^{K_i K_o}, \left(i = \overline{1,m}\right) \\ g_i \le -b_i^0, \left(i = \overline{m+1,n}\right) \\ q_j \ge 0, \left(j = \overline{1,n}\right) \end{cases}, \qquad (11)$$

де $g_i = -q_1 - q_2 - \ldots - q_{i-1} - q_{i+1} - \ldots - q_n$,

$d_i^{K_i K_o} = \dfrac{1}{\hat{a}_i^0} - \dfrac{1}{\hat{a}_i^{K_i K_o}}$.

Гнучке співвідношення "$\sim\le$" інтерпретується так: ліва бік нерівності не перевищує другого числа її правої частини і в більшості її випадків менша чи рівна першому числу цієї частини.

Множину альтернатив, які задовольняють обмеженням задачі лінійного програмування (11), позначити через Q. Тоді її можна записати в іншому виді, а саме:

$$Q = \left\{ q_j \in R_+^n \left(j = \overline{1,n}\right) | g_i < -b_i^0 + d_i^{K_i K_o} \right. \\ \left. \forall i = \overline{1,m}; g_i \le -b_i^0 \; \forall i = \overline{m+1,n} \right\}. \qquad (12)$$

Тобто тепер задачу лінійного програмування (11) ми представили як задачу знаходження цілі z на множині допустимих розв'язків Q, яку візьмемо як універсальну множину для цілі z.

У роботі [8, с. 146] стверджується, що згідно з підходом Беллмана-Заде, нечітка задача лінійного програмування (11) зводиться до задачі:

$$\lambda \to max, \qquad (13)$$

за умов, що $q_j \in Q\left(j = \overline{1,n}\right)$, $\lambda \le \mu_z(z)$, $\lambda \le \mu_i(g_i)$ ($i = \overline{1,m}$), $0 < \lambda \le 1$,

де $\lambda = \min\left[\mu_z(z), \mu_1(g_1), \ldots, \mu_m(g_m)\right]$, а $\mu_z(z)$ і $\mu_i(g_i)$ ($i = \overline{1,m}$) – вибрані функції належності, відповідно, величин z і g_i ($i = \overline{1,m}$).

Для того щоб модель (13) належала до класу моделей задач лінійного програмування, необхідно, щоб функції належності $\mu_z(z)$ і $\mu_i(g_i)$ ($i = \overline{1,m}$) були неперервними і лінійними чи кусково-лінійними. Тоді, застосовуючи ефективний метод, їх легко розв'язати.

Поступаючи за аналогією з поданим вище, задамо ці міри належності у виді неперервних кусково-лінійних функцій. Зокрема, з кускової інсталяції $\left(w^l, \mu_z\left(w^l\right)\right)$, $l = \overline{0, L_0}$, $L_0 \in N$ за заданих [8, с. 148] початкових умов

$$\left(w^0, \mu_z\left(w^0\right)\right) = \left(w_0 - d_0, 0\right), \; \left(w^{L_0}, \mu_z\left(w^{L_0}\right)\right) = \left(w_0, 1\right) \qquad (14)$$

і рекурентних співвідношень $w^{l-1} < w^l, \mu_z\left(w^{l-1}\right) < \mu_z\left(w^l\right)$, $l = \overline{1, L_0}$ утворимо на кожному проміжку $\left[w^{l-1}, w^l\right]$, $l = \overline{1, L_0}$ формулу для функції належності

$$\mu_z(w) = \mu_z\left(w^{l-1}\right) + \frac{\mu_z\left(w^l\right) - \mu_z\left(w^{l-1}\right)}{w^l - w^{l-1}}\left(w - w^{l-1}\right). \qquad (15)$$

Причому невідомі величини w_0 і d_0 для початкових умов раціонально визначає особа, яка приймає рішення, на основі таких обмежень:

$$\begin{cases} \underline{z} = w_0 - d_0 \\ w_0 \le \overline{z} \end{cases}, \tag{16}$$

де $\underline{z}$ і $\overline{z}$ – оптимальні розв'язки таких задач лінійного програмування:

$$\begin{cases} \underline{z} = \max z \\ g_i \le -b_i^0, \left(i = \overline{1,n}\right) \\ q_j \ge 0, \left(j = \overline{1,n}\right) \end{cases}, \tag{17}$$

$$\begin{cases} \overline{z} = \max z \\ g_i \le -b_i^0 + d_i^{K_i K_o}, \left(i = \overline{1,m}\right) \\ g_i \le -b_i^0, \left(i = \overline{m+1,n}\right) \\ q_j \ge 0, \left(j = \overline{1,n}\right) \end{cases}. \tag{18}$$

Аналогічно, ураховуючи кускову інсталяцію $\left(g_i^l, \mu_i\left(g_i^l\right)\right)$, $l = \overline{0, L_i}$, $L_i \in N$, початкові умови (дивись модель (11))

$$\left(g_i^0, \mu_i\left(g_i^0\right)\right) = \left(-b_i^0, 1\right),\ \left(g_i^{L_i}, \mu_i\left(g_i^{L_i}\right)\right) = \left(-b_i^0 + d_i^{K_i K_o}, 0\right), \tag{19}$$

і рекурентні співвідношення $g_i^{l-1} < g_i^l$, $\mu_i\left(g_i^{l-1}\right) < \mu_i\left(g_i^l\right)$, $l = \overline{1, L_i}$ напишемо для кожного проміжку $\left[g_i^{l-1}, g_i^l\right]$, $l = \overline{1, L_i}$ формулу функції належності у вигляді

$$\mu_i\left(g_i\right) = \mu_i\left(g_i^{l-1}\right) + \frac{\mu_i\left(g_i^l\right) - \mu_i\left(g_i^{l-1}\right)}{g_i^l - g_i^{l-1}}\left(g_i - g_i^{l-1}\right). \tag{20}$$

Можна показати, що функції належності (15) і (20) (μ_z і μ_i $\forall i = \overline{1,m}$) є увігнутими функціями відповідно на проміжках $\left[w_0 - d_0, w_0\right]$ і $\left[-b_i^0, -b_i^0 + d_i^{K_i K_o}\right]$, ($i = \overline{1,m}$), а нечітка модель (11) дефазифікується у таку «чітку» модель лінійного програмування [8, с. 148–149].

Розв'язавши задачу (21), розрахуємо оптимальні змішані стратегії другого гравця. Особу, яка приймає управлінські рішення, задовольняє такий розв'язок цієї задачі, для якого $\lambda > 0{,}5$. Цю умову він задовольняє вибором величин w_0 і d_0, ураховуючи обмеження (16).

$$\begin{cases} \lambda \to max \\ W^l \lambda - g_0 \le -w^{l-1} + W^l \mu_z\left(w^{l-1}\right), l = \overline{1, L_0}, \\ G_i^l \lambda - g_i \le -g_i^{l-1} + G_i^l \mu_i\left(g_i^{l-1}\right), l = \overline{1, L_i}, i = \overline{1,m}, \\ g_i \le -b_i^0, \left(i = \overline{m+1,n}\right), \\ q_j \ge 0, \left(j = \overline{1,n}\right), \\ \lambda \ge 0, \end{cases} \tag{21}$$

де $W^l = \dfrac{w^l - w^{l-1}}{\mu_z\left(w^l\right) - \mu_z\left(w^{l-1}\right)}$, $l = \overline{1, L_0}$,

$G_i^l = \dfrac{g_i^l - g_i^{l-1}}{\mu_i\left(g_i^l\right) - \mu_i\left(g_i^{l-1}\right)}$, $l = \overline{1, L_i}, i = \overline{1,m}$, $g_0 = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$.

Скориставшись отриманими результатами, вищевказаними формулами і розв'язавши задачу (3), на основі формул (5) знайдемо оптимальні змішані стратегії першого гравця.

Висновки і пропозиції. Проведені дослідження показали, що значну частину задач економічної конкуренції можна звести до скінченної матричної гри двох гравців із нульовою сумою, матриця виграшів першого гравця якої має специфічний вигляд. Оскільки вітчизняні ринки мають високий ступінь невизначеності, то і параметри в моделі розглянутого класу антагоністичних ігор будуть нечіткими.

У роботі розглянуто підхід до розв'язування певного класу теоретико-ігрових задач із нечіткими коефіцієнтами в їхніх моделях. Запропонований підхід полягає у зведенні цих моделей до двох двоїстих оптимізаційних задач лінійного програмування з граничними обмеженнями, коефіцієнти яких зображено кусково-лінійними функціями належності. Знайшовши розв'язок цих двоїстих задач і розрахувавши змішані стратегії двох гравців, особа, яка приймає управлінські рішення, зможе зробити правильний вибір серед сукупності альтернативних рішень.

Список використаних джерел:

1. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. Москва : Наука, 1970. 708 с.
2. Корнієнко В.О., Денисюк С.Г., Шиян А.А. Моделювання процесів у політико-комунікативному просторі : монографія. Вінниця : Універсум-Вінниця, 2009. 185 с.
3. Економічний ризик: ігрові моделі : навчальний посібник / В.В. Вітлінський та ін. ; за ред. В.В. Вітлінського. Київ : КНЕУ, 2002. 446 с.
4. Рогальський Ф.Б., Курилович Я.Е., Цукоренко А.А. Математические методы анализа экономических систем : в двух книгах. Киев : Наукова думка, 2001. Кн. 1. 420 с.
5. Юринець В., Мельник Н. Теоретико-ігрова модель оцінки збуту сільськогосподарської продукції. *Вісник Львівського університету. Серія економічна.* 2001. Вип. 30. С. 510–514.
6. Лондар С. Моделі прийняття рішень з проблем вдосконалення податкової політики в умовах ринкової трансформації економіки України : монографія. Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2001. 274 с.
7. Вітлінський В., Матвійчук А. Зміна парадигми в сучасній теорії економіко-математичного моделювання. *Економіка України.* 2007. № 11. С. 35–43.
8. Сявавко М.С., Рибицька О.М. Математичне моделювання за умов невизначеності. Львів : Українські технології, 2000. 319 с.
9. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Нечеткая оптимизация. Киев : Вища школа, 1991. 191 с.
10. Ротштейн А.П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети. Винница : Универсум-Винница, 1999. 320 с.
11. Купрій Н. Математична модель прогнозування волатильності акцій за умов невизначеності. *Вісник Львівського університету. Серія економічна.* 2008. Вип. 39(1). С. 270–273.
12. Pryimak V., Melnyk B., Melnyk N. Fuzzy Simulation of the Structure of the Ukrainian Power Generating Industry: 2019 IEEE 2nd Ukraine Conference on Elektrical and Computer Engineering. Lviv, Ukraine, July 2-6, 2019. P. 895–898.
13. Юринець В., Мельник Н. Теоретико-ігрова модель оцінки збуту сільськогосподарської продукції. *Вісник Львівського університету. Серія економічна.* 2001. Вип. 30. С. 510–514.
14. Мельник Н.Б., Приймак В.І. Оптимізаційна модель конкурентної боротьби продавців на роздрібному ринку за умов невизначеності. *Науковий вісник Чернівецького університету.* 2018. Вип. 797. С. 47–56.
15. Крушевський А.В. Теория игр. Киев : Вища школа, 1977. 216 с.

References:
1. Fon Neyman Dzh., Morgenshtern O. (1970) *Teoriya igr i ekonomicheskoe povedenie* [Game theory and economic behavior]. Moscow: Nauka. (in Russian)
2. Korniienko V.O., Denysiuk S.H., Shyian A.A. (2009) *Modeliuvannia protsesiv u polityko-komunikatyvnomu prostori* [Modeling of processes in the political-communicative space]. Vinnytsia: UNIVERSUM-Vinnytsia. (in Ukrainian)
3. Vitlinskyi V.V., Verchenko P.I., Sihal A.V., Nakonechnyi Ya. S. (2002) *Ekonomichnyi ryzyk: ihrovi modeli* [Economic risk: game models]. Kyiv: KNEU. (in Ukrainian)
4. Rogalskiy F.B., Kurilovich Ya.E., Tsukorenko A.A. (2001) *Matematicheskie metody analiza ekonomicheskikh sistem* [Mathematical methods for the analysis of economic systems]. Kyiv: Naukova dumka. (in Ukrainian)
5. Yurynets V., Melnyk N. (2001) Teoretyko-ihrova model otsinky zbutu silskohospodarskoi produktsii [Theoretical and game model for estimating the sale of agricultural products]. *Visnyk of the Lviv University. Series Economics,* vol. 30, pp. 510–514.
6. Londar S. (2001) *Modeli pryiniattia rishen z problem vdoskonalennia podatkovoi polityky v umovakh rynkovoi transformatsii ekonomiky Ukrainy* [Models of decision-making on the problems of improving tax policy in the market transformation of the economy of Ukraine]. Lviv: LNU im. I. Franka. (in Ukrainian)
7. Vitlinskyi V., Matviichuk A. Zmina paradyhmy v suchasnii teorii ekonomiko-matematychnoho modeliuvannia [Paradigm shift in the modern theory of economic and mathematical modeling]. *Ukraine economy,* no. 11, pp. 35–43.
8. Siavavko M.S., Rybytska O.M. (2000) *Matematychne modeliuvannia za umov nevyznachenosti* [Mathematical modeling under uncertainty]. Lviv: NVF “Ukrainski tekhnolohii”. (in Ukrainian)
9. Zaychenko Yu.P. (1991) *Issledovanie operatsiy: Nechetkaya optimizatsiya* [Operations Research: Fuzzy Optimization]. Kyiv: “Vishcha shkola”. (in Russian)
10. Rotshteyn A. P. (1999) *Intellektual'nye tekhnologii identifikatsii: nechetkie mnozhestva, geneticheskie algoritmy, neyronnye seti* [Intelligent identification technologies: fuzzy sets, genetic algorithms, neural networks]. Vinnitsa: “Universum-Vinnitsa”. (in Russian)
11. Kuprii N. Matematychna model prohnozuvannia volatylnosti aktsii za umov nevyznachenosti [Mathematical model for predicting stock volatility under conditions of uncertainty]. *Visnyk of the Lviv University. Series Economics,* vol. 39(1), pp. 270–273.
12. Pryimak V., Melnyk B., Melnyk N. (2019) Fuzzy Simulation of the Structure of the Ukrainian Power Generating Industry: 2019 IEEE 2nd Ukraine Conference on Elektrical and Computer Engineering (Lviv, Ukraine, July 2-6, 2019), pp. 895–898.
13. Yurynets V., Melnyk N. Teoretyko-ihrova model otsinky zbutu silskohospodarskoi produktsii [heoretical and game model for estimating the sale of agricultural products]. *Visnyk of the Lviv University. Series Economics,* vol. 30, pp. 510-514.
14. Melnyk N.B., Pryimak V.I. Optymizatsiina model konkurentnoi borotby prodavtsiv na rozdribnomu rynku za umov nevyznachenosti [Optimization model of competition of sellers in the retail market under conditions of uncertainty]. *Scientific Bulletin of Chernivtsi University: Collection of Sciences,* vol. 797, pp. 47–56.
15. Krushevskiy A.V. (1977) *Teoriya igr* [Game theory]. Kyiv: “Vishcha shkola”. (in Russian)

Приймак В. И.
Голубник О. Р.
Львовский национальный университет имени Ивана Франко

НЕЧЕТКИЕ МОДЕЛИ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР

Резюме
В работе предложен способ решения определенного класса теоретико-игровых моделей в условиях неопределенности. Обосновано, что значительную часть задач экономической конкуренции можно свести к конечной матричной игры двух игроков с нулевой суммой, матрица выигрышей первого игрока которой имеет специфический вид. Учитывая высокую степень неопределенности современных отечественных рынков и необходимость упрощения существующей ситуации при ее моделировании из-за невозможности включения в разрабатываемую модель всех реальных многообразных связей, в статье рассматриваются антагонистические игры с нечеткими параметрами. Предложено искать решение рассматриваемого класса конечных матричных игр сведением их к двум двойственным оптимизационным задачам линейного программирования с гибкими предельными ограничениями. Найдя решение этих двойственных задач и рассчитав смешанные стратегии двух игроков, лицо, которое принимает управленческие решения, сможет сделать правильный выбор среди совокупности альтернативных решений.
Ключевые слова: теория матричных игр, оптимальная стратегия, модель линейного программирования, нечеткая модель, функция принадлежности, кусочно-линейная функция принадлежности.

Pryimak Vasyl
Holubnyk Olga
Ivan Franko National University of Lviv

FUZZY MODELS OF ANTAGONISTIC GAMES

Summary
The article is a continuation of a series of works on modeling situations in competitive markets at both micro and macro levels and the development of approaches to finding solutions to the obtained models. The paper proposes a method for solving a certain class of game-theoretic models under conditions of uncertainty. It is substantiated that a significant part of the problems of economic competition can be reduced to a finite matrix game of two players with zero sum, the matrix of winnings of the first player which has a specific form. Given the high degree of uncertainty in modern domestic markets and the need to simplify the current situation in its modeling due to the impossibility of including in the developed model of all real multifaceted relationships, the article considers antagonistic games with fuzzy parameters. It is proposed to look for the solution of the considered class of finite matrix games by reducing them to two dual optimization problems of linear programming with flexible limit constraints. The case is considered when the coefficients in the system of constraints of these models of linear programming are approximated by piecewise-linear member-

ship functions, because they do not raise the question of linearity of the studied models. Using certain linear transformations, the optimization models of linear programming obtained in this work are reduced to models of a special kind, the method of solving which has been developed by other scientists. The essence of this method is that according to the Bellman-Zadeh approach, the resulting fuzzy model is reduced to the decision problem described by the multi-purpose optimization model, the solution of which includes only those alternatives, in such problems are called Pareto effective. Using this method, the fuzzy model obtained in the work is reduced to a "clear" problem of linear programming, some parameters of which are rationally determined by the person making managerial decisions, based on certain limitations obtained by solving two "clear" optimization models with known coefficients. By finding the solution to these dual problems and calculating the mixed strategies of the two players, the person making management decisions will be able to make the right choice among a set of alternative solutions.
Keywords: matrix game theory, optimal strategy, linear programming model, fuzzy model, membership function, piecewise-linear membership function.